SISTEMI DINAMICI DISCRETI: ASSAGGI E SPUNTINI

EUGENIO MONTEFUSCO

Dipartimento di Matematica *G. Castelnuovo*
Università degli Studi di Roma *La Sapienza*
Piazzale A. Moro 5, 00185 Roma
http://www.mat.uniroma1.it/people/montefusco

W+XYZ(A)(C)+6CA+M=11
M. Vázquez Montalbán

AVVERTENZE

Carissima/o,
vorrei proporti alcuni esercizi che reputo impegnativi e divertenti (chiaramente non tutti nella stessa misura!) e contemporaneamente interessanti da un punto di vista culturale. Chiaramente spero che questa proposta funzioni o, meno presuntuosamente, che questi esercizi siano almeno un buon passatempo! Naturalmente mi scuso se non riuscirò a raggiungere questo obiettivo, evidentemente mi sono impegnato poco...

L'argomento di questi esercizi sono alcuni sistemi dinamici discreti. Nonostante il nome altisonante si tratta di successioni per ricorrenza, quindi nulla di particolarmente esotico. Con questi esercizi ci avvicineremo ad un settore della matematica decisamente vasto e complicato e non intendo fornire una visione d'insieme ma solo alcuni assaggi scelti. L'eventuale **commensale** particolarmente interessato ad approfondire è pregato di rivolgersi a corsi monografici sull'argomento o a fonti più autorevoli (qualcosa è citato in bibliografia).

Credo che i testi degli esercizi saranno chiari per tuttti, a scanso di equivoci riporto qui le notazioni che adotterò

- $f^k = f \circ f \circ \ldots f$ la composizione di f con sé stessa k volte,
- i normali caratteri (per esempio x o a) sono utilizzati per indicare numeri reali, mentre per i punti del piano o dello spazio useremo i simboli $\mathbf{x}$ o $\mathbf{p}$,
- $D_f(\mathbf{x})$ la matrice jacobiana della funzione f calcolata nel punto $\mathbf{x}$,
- $\mathfrak{H}$ indica la funzione parte frazionaria.

Ora cominciamo con il solito esempio facile riservato all'autore, poi ci metteremo al lavoro sul serio!

1. Antipasto

Cominciamo analizzando una situazione particolarmente semplice, che ci permetterà di mettere a fuoco la tipologia di problemi che vogliamo analizzare.

Supponiamo (molto ipoteticamente) di avere una certa disponibilità di denaro e di volerla depositare in una banca. Naturalmente siamo fortemente interessati a capire il meccanismo con cui la banca tutela i nostri interessi e gestisce i nostri soldi. In particolare vogliamo sapere qual è il tasso di interesse che la banca ci da', cioè in che percentuale il capitale versato aumenta allo scadere del periodo concordato a causa degli interessi. Nel seguito indicheremo il tasso d'interesse, cioè la percentuale di crescita del capitale, con la costante reale γ. Inoltre supporremo che dopo il versamento iniziale α non ci siano più movimenti da parte nostra e che il conto corrente sia puramente ideale, cioè che non ci siano tasse e/o spese bancarie che gravino sui nostri soldi...

Da quanto detto abbiamo che allo scadere del periodo stabilito con la banca vengono aggiunti dei soldi ai nostri averi in quantità proporzionale al deposito presente sul conto: questo significa che se chiamo C_n i soldi in banca dopo n periodi abbiamo la seguente relazione

$$C_{n+1} - C_n = \gamma C_n.$$

Questa è chiaramente una legge che determina il valore del nostro conto, non appena sia noto il capitale posseduto alla scadenza precedente.

Problema 1.1. *Dalla precedente discussione abbiamo ricavato il seguente modello*

$$\begin{cases} C_{n+1} = (1+\gamma)C_n \\ C_0 = \alpha \end{cases}, \tag{1.1}$$

con $\alpha > 0$ e $0 < \gamma < 1$. Si descriva la dinamica del nostro capitale e, in particolare, se ne deduca il comportamento asintotico.

Soluzione 1.1. E' facile ricavare da (1.1), per induzione, la legge chiusa

$$C_n = (1+\gamma)^n \alpha, \tag{1.2}$$

da questo, ricordando che $\alpha > 0$, abbiamo che $C_n \longrightarrow +\infty$. In generale per il sistema dinamico definito da (1.1) la conclusione è che il capitale aumenta indefinitivamente e tende a $+\infty$, quindi si può diventare arbitrariamente ricchi! Naturalmente questo sogno si realizza a patto di trovare una banca ideale e di saper attendere...

■

Adesso osserviamo che la (1.2) è valida $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, quindi possiamo dire che $C_n \longrightarrow +\infty$ se $\alpha > 0$, $C_n = 0$ se $\alpha = 0$ e $C_n \longrightarrow -\infty$ se $\alpha < 0$. Questo ci permette di riconsiderare il sistema (1.1) nella seguente ottica: abbiamo una successione per ricorrenza (o, come diremo sempre nel seguito, un sistema dinamico discreto) che modellizza un problema (reale o meno), ci proponiamo di provare a rispondere ad alcune delle seguenti questioni

i) il sistema dinamico converge?
ii) è possibile calcolare il limite dalla successione?
iii) se la successione non converge, cosa succede?
iv) che ruolo hanno gli eventuali parametri in questo discorso?

Ovviamente a voi rispondere esaurientemente a queste lancinanti domande, almeno per i problemi che seguiranno...

2. Piatti e posate

Ricapitoliamo qui alcune definizioni che useremo in tutto il pasto che ci si prospetta dinnanzi.

Dato il seguente sistema dinamico discreto

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n) \\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{p} \end{cases}, \tag{2.1}$$

con $\mathbf{p} \in \mathbb{E}$ (ci interessano soltanto i casi $\mathbb{E} = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ o loro sottoinsiemi) e $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$, diremo che

- $\mathbf{p} \in \mathbb{E}$ è il **dato iniziale** del sistema,
- $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ è un **punto fisso** di f se $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$, inoltre tale $\mathbf{x}$ sarà chiamata soluzione stazionaria di (2.1) (relativamente al dato iniziale $\mathbf{x}$),
- $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ è un **punto periodico** di f (con periodo k) se $f^k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, cioè se $\mathbf{x}$ è un punto fisso di f^k. In tal caso $\mathbf{x}$ determina una **soluzione k-periodica** di (2.1),
- $k \in \mathbb{N}$ è il **primo periodo** di $\mathbf{x}$ se $f^k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ e $f^n(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$, per $n = 1, \dots, (k-1)$,
- se $\mathbf{x}$ è un punto periodico di f con primo periodo k l'insieme $\{\mathbf{x}, f(\mathbf{x}), \dots, f^{k-1}(\mathbf{x})\}$ costituisce l'**orbita** di $\mathbf{x}$, in generale per orbita di un punto iniziale $\mathbf{p}$ si intende l'insieme dei punti della forma $\{f^k(\mathbf{p}), k \in \mathbb{N}\}$,
- $\mathbf{p}$ è un **pozzo** (o un punto attrattivo) se è una soluzione stazionaria di (2.1) ed esiste $\varepsilon > 0$ tale che $f^k(\mathbf{x}) \longrightarrow \mathbf{p}$, per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{p}, \varepsilon)$. Il **bacino di attrazione** di $\mathbf{p}$ è l'insieme di tutti i punti la cui dinamica converge a $\mathbf{p}$,

- $\mathbf{p}$ è una **sorgente** se è una soluzione stazionaria di (2.1) ed esiste $\varepsilon > 0$ tale che $|f^k(\mathbf{x}) - \mathbf{p}| > \varepsilon$ (per un certo k), per ogni $\mathbf{x} \neq \mathbf{p}$ tale che $\mathbf{x} \in B(\mathbf{p}, \varepsilon)$,
- un insieme $\mathfrak{Z} \subseteq \mathbb{E}$ si dice **attrattore** se esiste un'aperto A tale che $\mathfrak{Z} \subseteq A \subseteq \mathbb{E}$ e, $\forall \mathbf{p} \in A$, $f^k(\mathbf{p}) \longrightarrow \mathfrak{Z}$.

3. Primi piatti

Affrontiamo ora le prime pietanze del menu. Gli esercizi contenuti in questa sezione sono di carattere più immediato, quindi meglio si prestano al primo impatto con l'argomento.

Problema 3.1. *Sia $x_{n+1} = f(x_n)$, con f funzione continua, e supponiamo che $x_n \longrightarrow L$. Caratterizzare L in termini della funzione f.*

Problema 3.2. *Si consideri il seguente sistema dinamico discreto*

$$\begin{cases} C_{n+1} - C_n = \gamma C_n - \sigma \\ C_0 = \alpha \end{cases} \tag{3.1}$$

con $\alpha > 0$ e $0 < \gamma \leq 1$. Tale modello è un'evoluzione di (1.1), la costante $\sigma > 0$ descrive il fatto che la banca sottragga qualcosa al nostro conto corrente, con cadenza uguale alla maturazione degli interessi (generalmente questa decurtazione viene denominata tassa*...). Si chiede di*

i) *determinare tutte le soluzioni stazionarie,*
ii) *determinarne il bacino di attrazione,*
iii) *provare che la successione è monotona, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,*
iv) *calcolare esplicitamente la soluzione e il suo comportamento asintotico.*

Problema 3.3. *Dato il seguente sistema dinamico discreto*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{4}{\pi} \mathit{arctg}(x_n) \\ x_0 = \alpha \end{cases},$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, si soddisfi le seguenti richieste

i) *determinare l'insieme delle soluzioni stazionarie e il loro carattere,*
ii) *calcolare il bacino di attrazione delle soluzioni stazionarie.*

Problema 3.4. *Consideriamo l'algoritmo di Erone, ovvero la seguente successione per ricorrenza*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right) \\ x_0 = 2 \end{cases}.$$

Si chiede di provare che

i) $x_n > 0$,

ii) $2 \leq x_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
iii) $(x_n - \sqrt{2}) \leq 2^{-n}$.

Problema 3.5. *Dato il sistema dinamico definito da*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n} \\ x_0 = \alpha \neq 0 \end{cases},$$

i) *determinare tutti gli eventuali limiti,*
ii) *determinarne il bacino di attrazione,*
iii) *discutere l'esistenza di orbite periodiche.*

Problema 3.6. *Dato il sistema dinamico definito da*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n^2} \\ x_0 = \alpha \neq 0 \end{cases},$$

i) *determinare tutti gli eventuali limiti,*
ii) *determinarne il bacino di attrazione.*

Problema 3.7. *Si consideri il sistema (2.1) e si assuma che f sia di classe C^1 e che $|f'(t)| \leq \delta < 1$, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Allora si mostri che esiste un'unico punto fisso $\overline{x} \in \mathbb{R}$ del sistema dinamico discreto e che tale punto è un pozzo con bacino di attrazione uguale ad $\mathbb{R}$.*

Problema 3.8. *Consideriamo il seguente sistema dinamico (una generalizzazione dell'algoritmo di Erone)*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{\alpha}{x_n}\right) \\ x_0 = \beta \end{cases},$$

con $\alpha, \beta > 0$. Si chiede di

i) *calcolare tutti gli eventuali limiti,*
ii) *determinare il bacino di attrazione delle soluzioni stazionarie (suggerimento: la successione è definitivamente monotona),*
iii) *ripetere i precedenti punti per il caso $\beta < 0$,*
iv) *proporre un algoritmo per il calcolo della radice k-sima di un numero reale positivo e ripetere i punti precedenti.*

Cosa si può dire del caso $\alpha = -1$ e $\beta > 0$?

Problema 3.9. *Sia $p \in \mathbb{R}$ una soluzione stazionaria di (2.1) e si assuma che f sia di classe $C^1(\mathbb{R})$. Si mostri che se $|f'(p)| < 1$ allora p è un pozzo, mentre se $|f'(p)| > 1$ allora p è una sorgente. Cosa si può dire per il caso $|f'(p)| = 1$?*

Problema 3.10. *Sia $p \in \mathbb{R}$ una soluzione k-periodica di (2.1) e si assuma che f sia di classe $C^1(\mathbb{R})$. Si metta in relazione la stabilità dell'orbita periodica con la funzione $f'(t)$ (suggerimento: se p genera un'orbita è perché è una soluzione stazionaria di f^k).*

Problema 3.11. *Dato il sistema dinamico definito da*

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n) \\ x_0 = \alpha \end{cases},$$

con $0 < \alpha < 1$ si chiede di

i) *determinare tutti gli eventuali limiti,*
ii) *determinare il bacino di attrazione delle soluzioni stazionarie.*

Problema 3.12. *Dato il seguente sistema dinamico discreto*

$$x_{n+1} = \mathfrak{H}(x_n + q), \tag{3.2}$$

dove $\mathfrak{H}(\cdot)$ indica la funzione parte frazionaria e $q \in \mathbb{R}$. Si risponda ai seguenti quesiti

i) *esistono soluzioni stazionarie del sistema dinamico?*
ii) *posto $q = 1/k$ (con $k > 1$), esistono orbite periodiche? Quali periodi sono possibili?*
iii) *posto $q = j/k$ (con $j, k \in \mathbb{Z}$ e $k > 1$), esistono orbite periodiche? Quali periodi sono possibili?*
iv) *cosa succede per $q = \pi$?*

Problema 3.13. *Dato, in $\mathbb{R}^2$, il seguente sistema dinamico discreto*

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{p} \end{cases}, \text{ con } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

si risponda alle seguenti questioni

i) *determinare l'insieme delle soluzioni stazionarie e delle orbite periodiche,*
ii) *calcolare gli autovalori di A,*
iii) *determinare il carattere delle soluzioni trovate al punto* i).

Problema 3.14. *Dato, in $\mathbb{R}^2$, il seguente sistema dinamico discreto*

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{p} \end{cases}, \text{ con } A = \begin{pmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 3/4 & 5/4 \end{pmatrix},$$

si risponda alle seguenti questioni

i) *determinare l'insieme delle soluzioni stazionarie e delle orbite periodiche,*
ii) *diagonalizzare la matrice A e riscrivere il sistema nel nuovo sistema di riferimento,*

iii) *determinare l'espressione esplicita della soluzione con* $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$,
iv) *calcolare il bacino di attrazione di* $\mathbf{O}$ *e di* ∞.

Problema 3.15. *Dato, in* $\mathbb{R}^2$*, il sistema dinamico discreto*

$$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n). \tag{3.3}$$

Descriviamo l'azione della funzione f *sui punti di* $\mathbb{R}^2$ *usando le coordinate polari:* $f(r, \vartheta) = (r^2, \vartheta - \sin(\vartheta))$. *Si chiede di verificare le seguenti affermazioni*

i) $\mathbf{O}$, $(1, 0)$ *e* $(1, \pi)$ *sono soluzioni stazionarie di (3.3),*
ii) $\mathbf{O}$ *e* ∞ *sono degli attrattori (qual è il loro bacino di attrazione?),*
iii) *restringendo la dinamica su* S^1 *si ottiene che* $(1, \pi)$ *è una sorgente e* $(1, 0)$ *un pozzo.*

4. Vini e bevande

Apriamo una piccola parentesi per fare un piccolo esempio di sistema dinamico discreto di tipo completamente diverso dalle successioni per ricorrenza.

Consideriamo il seguente insieme

$$\mathfrak{K} = \left\{ E \subseteq \mathbb{R}^2 : E \text{ compatto} \right\}.$$

Dato un elemento E in $\mathfrak{K}$ definiamo le seguenti operazioni $\delta E = \{\delta \mathbf{x} : \mathbf{x} \in E\}$, $E + \mathbf{p} = \{\mathbf{x} + \mathbf{p} : \mathbf{x} \in E\}$ e $[E]_\delta = \{p \in \mathbb{R}^2 : \inf_{p \in E} |x - p| \leq \delta\}$, ci torneranno utili fra poco...

Dati due elementi e ed F compatti in $\mathbb{R}^2$ possiamo definire la seguente applicazione (detta **metrica di Hausdorff**) nel seguente modo

$$d(E, F) = \inf \left\{ \delta : E \subset [F]_\delta \text{ e } F \subset [E]_\delta \right\}.$$

E' possibile verificare che la coppia $\mathbb{K} = (\mathfrak{K}, d)$ così definita è uno spazio metrico completo, ovviamente i punti di questo spazio sono gli insiemi compatti di $\mathbb{R}^2$!

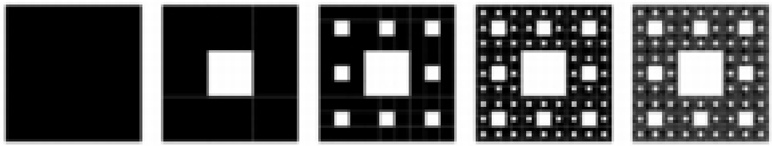
Ora possiamo costruire un sistema dinamico discreto in $\mathbb{K}$ nel seguente modo

$$\begin{cases} Q_0 = [0, 1]^2 \\ Q_{n+1} = \mathcal{T}(Q_n) \end{cases}, \tag{4.1}$$

con

$$\mathcal{T}(A) = \cup_{p \in I} \left(\frac{1}{3} A + p \right),$$

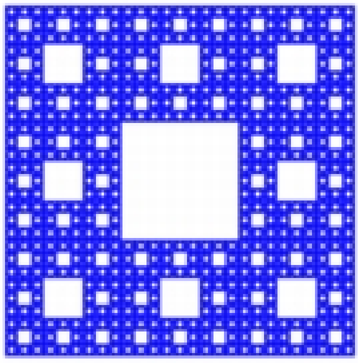
$I = \{(1/6, 1/6), (1/2, 1/6), (5/6, 1/6), (1/6, 1/2), (5/6, 1/2), (1/6, 5/6), (1/2, 5/6), (5/6, 5/6)\}$. Per illustrare come lavora il sistema dinamico (4.1) osserviamo i primi elementi generati dalla ricorrenza.



E′ possibile provare che l'applicazione $\mathcal{T}$ è una contrazione, quindi la successione di compatti $\{Q_n\}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{K}$, e, poiché lo spazio è completo, converge ad un punto limite Q che è l'unica soluzione dell'equazione

$$Q = \mathcal{T}(Q),$$

il compatto limite Q è generalmente noto come *tappeto di Sierpinskii*. Dalla definizione di $\mathcal{T}$ segue che alcuni suoi sottoinsiemi propri sono (a meno del fattore di riscalamento $1/3$) uguali all'insieme intero, tale proprietà è detta di autosimilarità ed è posseduta da molti altri insiemi frattali. Per chiarirci le idee ecco il tappeto in questione!



Usando questo approccio è possibile generare e lavorare matematicamente con molti frattali autosimilari, basta scegliere un compatto di partenza e una contrazione opprtuna.

5. Secondi piatti e contorni

Adesso è il momento di pietanze più impegnative, che richiedano del tempo per la degustazione, la digestione e l'assimiliazione...

Problema 5.1. *Dato il seguente sistema dinamico discreto*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{(1+k)x_n}{1+kx_n} \\ x_0 = \alpha \end{cases}, \tag{5.1}$$

con $\alpha, k \in \mathbb{R}^+$, si risponda alle seguenti questioni

i) *determinare l'insieme delle soluzioni stazionarie e il loro carattere,*
ii) *provare che la successione è monotona, $\forall \alpha > 0$, e provarne la convergenza,*
iii) *scrivere l'espressione esplicita della successione.*

Problema 5.2. *Si consideri il sistema dinamico discreto generato da*

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 = \alpha \end{cases},$$

dove $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *è una funzione continua e crescente. Ricordando che per convenzione vale* $\sup(\emptyset) = -\infty$ *e* $\inf(\emptyset) = +\infty$*, si provi che se* α *non è una soluzione stazionaria del sistema allora*

i) *se* $\alpha > f(\alpha)$ *allora* $x_n \longrightarrow \alpha^- = \sup\{t \leq \alpha : t < f(t)\}$,
ii) *se* $\alpha < f(\alpha)$ *allora* $x_n \longrightarrow \alpha^+ = \inf\{t \geq \alpha : t > f(t)\}$.

Problema 5.3. *Dato il sistema dinamico*

$$x_{n+1} = \mathfrak{f}(x_n), \text{ con } \mathfrak{f}(x) = \begin{cases} x+1 & x < 1 \\ 2(2-x) & x \geq 1 \end{cases}, \tag{5.2}$$

provare le seguenti affermazioni

i) 0 *è un punto* 3*-periodico,*
ii) $\mathfrak{f}([0,2]) \supseteq [0,2]$*, quindi esiste un punto fisso di (5.2) (calcolarlo!),*
iii) *esiste un intervallo* $I \subseteq [0,2]$ *tale che* $\mathfrak{f}(I) \supseteq [0,1]$ *e* $\mathfrak{f}([0,1]) \supseteq [1,2]$*, questo implica che (5.2) possiede un punto* 2*-periodico (calcolarlo!),*
iv) *(5.2) possiede un punto* n*-periodico,* $\forall n > 3$.

Suggerimento: iii) *significa che* $\mathfrak{f}(I) \cap I = \emptyset$ *e* $\mathfrak{f}^2(I) \supseteq I$ *quindi esiste un punto* 2*-periodico che non è una soluzione stazionaria, provare a generalizzare l'idea per* $n > 3$.

Problema 5.4. *Dato, in* $\mathbb{R}^2$*, il sistema dinamico definito da*

$$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n),$$

con $f(x,y) = (1 - x^2 + y, y^2)$*, si chiede di*

i) *studiare l'esistenza di soluzioni stazionarie,*
ii) *studiare l'esistenza di soluzioni* 2*-periodiche,*
iii) *calcolare gli autovalori delle matrici* $D_f(0,0)$ *e* $D_f(1,0)$*,*
iv) *cosa possiamo dire sull'attrattività delle orbite trovate?*

Problema 5.5. *Dato, in* $\mathbb{R}^2$*, il seguente sistema dinamico discreto*

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{p} \end{cases}, \text{ con } A = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

si risponda alle seguenti questioni

i) *calcolare l'orbita generata da* $(1,0)$*,*
ii) *cosa si può dire sull'esistenza di orbite* k*-periodiche?*

Problema 5.6. *Dato, su* $S^2 = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{p}| = 1\}$*, il seguente sistema dinamico discreto*

$$\mathbf{x}_{n+1} = F(\mathbf{x_n}) = \frac{A\mathbf{x}_n}{|A\mathbf{x}_n|}, \text{ con } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

si provi che

i) *i vettori* $\pm e_1$*,* $\pm e_2$ *e* $\pm e_3$ *sono i punti fissi del sistema,*
ii) $DF(\pm e_i)$ *possiede un autovalore nullo con autovettore associato* $\pm e_i$*,*
iii) *gli autovettori di* $DF(\pm e_i)$ *sono i vettori* e_j*,* $j = 1, 2, 3$*,*
iv) $\pm e_1$ *sono due sorgenti,* $\pm e_2$ *sono due selle e* $\pm e_3$ *sono due pozzi.*

Si provi a delineare la dinamica di alcuni punti di S^2 *sotto l'azione del sistema dinamico.*

Problema 5.7. *Dato il sistema dinamico definito da*

$$\begin{cases} x_{n+1} = -\dfrac{5}{3}x_n^2 + \dfrac{2}{3}y_n + 1 \\ \\ y_{n+1} = -\dfrac{5}{3}y_n^2 + \dfrac{2}{3}x_n + 1 \end{cases},$$

si chiede di

i) *studiare l'esistenza di soluzioni stazionarie,*
ii) *studiare l'esistenza di soluzioni* 2*-periodiche (cosa succede partendo da* $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$*?),*
iii) *determinare il carattere delle orbite trovate al punto ii).*

Problema 5.8. *Dato il seguente sistema dinamico discreto*

$$x_{n+1} = \mathfrak{H}(2x_n), \tag{5.3}$$

dove $\mathfrak{H}(\cdot)$ *indica la funzione parte frazionaria. Discutere le seguenti affermazioni*

i) *esistono soluzioni stazionarie del sistema dinamico,*
ii) *esistono orbite periodiche del sistema dinamico,*
iii) *esistono orbite caotiche del sistema dinamico (5.3).*

Suggerimento: si scriva il dato iniziale in termini di rappresentazione binaria, cioè $x_0 = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} a_j 2^{-j}$*.*

Problema 5.9. *Dato, in* $\mathbb{R}^2$*, il sistema dinamico discreto*

$$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n), \tag{5.4}$$

dove $f(r, \vartheta) = (\sqrt{r}, 2\vartheta)$ *(*r *e* ϑ *sono le coordinate polari di* $\mathbb{R}^2$*). Si chiede di verificare le seguenti affermazioni*

i) **O** *è una sorgente del sistema dinamico (5.4),*
ii) S^1 *è un attrattore.*

6. Caffè e digestivi

Riportiamo qui alcune (non tutte!) soluzioni dei problemi precedenti. L'intenzione è di aiutare l'ingordo degustatore a smaltire una possibile indigestione fatta con i precedenti esercizi! La numerazione della discussione rimanda all'esercizio che si vuole discutere.

Soluzione 3.1. Dalla definizione di limite e per la continuità della funzione f possiamo scrivere, passando al limite per n che tende a $+\infty$ abbiamo

$$L = \lim_{t \longrightarrow L} f(t),$$

che ci fornisce la seguente alternativa, o $L = \pm\infty$, oppure soddisfa l'equazione

$$L = f(L). \tag{6.1}$$

■

Soluzione 3.2. Partendo dalle considerazioni generali fatte a proposito di (1.1) e tenendo conto di (6.1), osserviamo subito che l'aggiunta del termine $-\sigma$ implica la comparsa di una soluzione stazionaria che in (1.1) era la soluzione nulla. Calcoliamo le soluzioni stazionarie di (3.1)

$$L = (1+\gamma)L - \sigma,$$

$$L = \sigma/\gamma,$$

quindi i possibili limiti del sistema dinamico discreto sono σ/γ e $\pm\infty$, quindi dobbiamo capire cosa succede alla soluzione di (3.1) al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Per avere una espressione chiusa per la soluzione tipo la formula (1.2), bisogna faticare un po' di più, però tale formula esaurisce la discussione... Procedendo per induzione si trova che

$$C_n = (1+\gamma)^n \alpha - \left(\sum_{k=0}^{n-1} (1+\gamma)^k \right) \sigma, \tag{6.2}$$

dove risulta lampante l'effetto frenante della tassazione! In particolare non è più ovvio che ci si possa arricchire a volontà partendo da un capitale qualsiasi, cioè che $+\infty$ sia un pozzo per tutti i dati iniziali positivi! Usando le proprietà della serie geometrica otteniamo

$$C_n = (1+\gamma)^n \alpha - \frac{(1+\gamma)^n - 1}{(1+\gamma) - 1}\sigma = (1+\gamma)^n \left(\alpha - \frac{\sigma}{\gamma} \right) + \frac{\sigma}{\gamma},$$

il che ci permette di tirare le seguenti conclusioni

i) se $\alpha > \sigma/\gamma$ tutto è analogo al caso precedente, anche se il nostro capitale rende come se fosse $(\alpha - \sigma/\gamma)$,
ii) se $\alpha = \sigma/\gamma$ la dinamica è stazionaria: il nostro capitale non frutta e non si disperde (ovviamente stiamo trascurando gli effetti dell'inflazione),
iii) se $\alpha < \sigma/\gamma$ presto il nostro conto andrà in rosso, e la banca applicherà ben altri tassi d'interesse... ma questa è un'altra storia!

■

Soluzione 3.3. Immediatamente risolviamo l'equazione

$$L = \frac{4}{\pi}\text{arctg}(L),$$

che possiede solo le soluzioni $L = 0, \pm 1$, inoltre, poiché la funzione arcotangente è dispari, notiamo che è sufficiente discutere il caso $\alpha \geq 0$.

Ovviamente se $\alpha = 0, 1$ il sistema non evolve (per definizione di soluzione stazionaria). Se $0 < \alpha < 1$, sfruttando le proprietà della funzione arctg$(t) - t$, è possibile mostrare che la successione è crescente e limitata, quindi deve convergere alla soluzione stazionaria 1, la situazione è analoga se $\alpha > 1$: la successione decresce verso 1.

■

Soluzione 3.5. Chiaramente il limite deve risolvere l'equazione $L^2 = 1$, quindi le uniche soluzioni stazionarie sono ± 1.

Consideriamo ora $\alpha \neq 0, \pm 1$, provando a scrivere i primi termini della successione abbiamo

$$x_0 = \alpha, \quad x_1 = 1/\alpha, \quad x_2 = \alpha = x_0!$$

Questo ci fa sospettare che ogni α generi una 2-orbita, infatti abbiamo che $f^2(t) \equiv t$, quindi la dinamica del sistema è oscillante con periodo 2, le considerazioni fatte mostrano anche che il bacino d'attrazione delle soluzioni stazionarie è costituito soltanto dalla soluzione stessa. ■

Soluzione 3.7. Per ottenere la tesi è sufficiente applicare il teorema delle contrazioni. ■

Soluzione 3.9. Poiché $|f'(p)| < 1$ per il teorema della permanenza del segno esiste un intervallo $(p - \delta, p + \delta)$ in cui $|f'(x)| \leq \varepsilon < 1$. Ricordando che $f(p) = p$ e scegliendo $x \in (p - \delta, p + \delta)$ abbiamo che

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| = |f'(\xi)||x - p| \leq \varepsilon\delta < \delta,$$

e in generale

$$|f^k(x) - p| = |f^k(x) - f^k(p)| = \cdots \leq \varepsilon^k\delta,$$

passando al limite per $k \longrightarrow +\infty$ abbiamo provato la prima affermazione.

Se si suppone $|f'(p)| > 1$ possiamo ottenere che $|f^k(x) - p| \geq \varepsilon^k |x - p|$, almeno finché l'iterata $f^k(x) \in (p - \delta, p + \delta)$ e per k sufficientemente grande l'orbita esce dall'intervallo. Infine notiamo che nel caso $|f'(p)| = 1$ non si può concludere nulla, come prova il Problema 3.5. ■

Soluzione 3.11. Cominciamo osservando che $f([0,1]) \subset [0,1]$, per $f(t) = 2t(1-t)$, quindi la dinamica si evolve esclusivamente nell'intervallo unitario dell'asse reale. Risolvendo la (6.1) nel nostro caso otteniamo che $L = 0, 1/2$ che sono le uniche soluzioni stazionarie. Inoltre è facile notare anche che se $\alpha = 1$ segue $x_n = 0$, $n \geq 1$.

Adesso osserviamo che se $\alpha \in (1/2, 1)$ allora abbiamo che $x_1 \in (0, 1/2)$, questo mi permette di ricondurre tutto il problema allo studio del caso $0 < \alpha < 1/2$. Proviamo che in questo caso la successione è crescente, infatti abbiamo

$$x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n) = 2x_n - 2x_n^2 \geq x_n,$$

perché $t \geq 2t^2$ per $0 < t < 1/2$. Dunque la successione è regolare e limitata e converge (crescendo) al suo estremo superiore che deve essere il valore $1/2$. ■

Soluzione 3.12. Tenendo in mente la definizione della funzione $\mathfrak{H}$ parte frazionaria possiamo cominciare a rispondere alle questioni poste. Le soluzioni stazionarie sono tutte le soluzioni $L \in (0,1)$ dell'equazione

$$L = \gamma(L + q),$$

questo significa che l'addizione di q non deve alterare lo sviluppo decimale del numero, ma solo la sua parte intera! Quindi possiamo concludere che se $q \in \mathbb{Z}$ ogni L è soluzione stazianaria, altrimenti non esistono soluzioni stazionarie di (3.2).

Il caso $q = 1/k$ è istruttivo. Infatti qualunque sia il dato iniziale di partenza la sua parte decimale viene chiaramente alterata (l'operazione è sostanzialmente una traslazione su $[0,1]$ con gli estremi identificati!), però è evidente che dopo aver applicato k volte la funzione si torna necessariamente al punto di partenza, inoltre è facile convincersi che un numero minore di ripetizioni non è sufficiente, quindi ogni punto è k-periodico e genera un'orbita di punti equidistanti.

Nel caso in cui q sia una generica frazione il discorso non è molto differente dal precedente (ovviamente escludiamo di trattare nuovamente i casi precedenti). Le iterazioni della funzione traslano il dato iniziale e generano nuovamente un'orbita periodica visto che sommando j/k con sé stesso alla fine *beccheremo* un numero intero, tornando sul dato iniziale. L'unica novità consiste nel determinare il primo periodo che è il più piccolo numero $m \in \mathbb{N}$ tale che $mj/k \in \mathbb{Z}$. Chiaramente abbiamo che $m = k$ se j e k sono coprimi, altrimenti

$m = k/(j,k)$, dove (j,k) indica il massimo comun divisore tra i due interi.

L'ultimo caso è decisamente diverso dai precedenti, infatti $q \notin \mathbb{Q}$! Questo implica che $\nexists k \in \mathbb{N}$ tale che $k\pi \in \mathbb{N}$ quindi iterando il processo il punto x_n non torna mai su sé stesso, cioè ogni dato iniziale α non è un punto periodico, anzi genera una successione di punti densa in $[0,1]$! ■

Soluzione 3.13. Le soluzioni stazionarie si trovano facilemnte imponendo che le coordinate del punto soddisfino il sistema, da questo si ottiene che esiste una sola soluzione stazionaria il punto **O**. Per le orbite periodiche il discorso è decisamente più complesso. Osserviamo subito che il sistema è lineare e che lo spettro della matrice è l'insieme $\sigma(A) = \{\pm i\}$, quindi l'origine è un punto fisso del sistema che non è attrattivo né repulsivo e la matrice è una rotazione (precisamente di $\pi/2$). In conclusione ogni $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ distinto da **O** è un punto 4-periodico, come è facile verificare a mano. ■

Soluzione 5.1. Applicando i metodi dei precedenti esercizi è facile vedere che le uniche soluzioni stazionarie possibili sono 1 e 0, il loro carattere sarà chiaro alla fine dello svolgimento. Innanzitutto osserviamo che

$$\frac{(1+k)t}{1+kt} > t \quad \forall t \in (0,1),$$

$$\frac{(1+k)t}{1+kt} < t \quad \forall t \in (1,+\infty),$$

per induzione è facile mostrare che le successioni aventi dato iniziale minore di 1 sono limitate superiormente dal valore 1 e sono monotone crescenti, simmetricamente le successioni per $\alpha > 1$ sono inferiormente limitate (da 1) e decrescenti. In ogni caso abbiamo a che fare con successioni convergenti ad 1, che è quindi un pozzo con bacino di attrazione la semiretta dei reali positivi. Conseguentemente 0 è una sorgente.

Terminiamo l'esercizio ricavando la soluzione esplicita. Ragionando per ricorrenza (si cominci con lo scrivere i primi termini della successione), ricordando le proprietà della serie geometrica e usando un po' la testa non è difficile ottenere la seguente formula

$$x_n = \frac{(1+k)^n \alpha}{1 + ((1+k)^n - 1)\,\alpha},$$

la dimostrazione si completa rapidamente per induzione. ■

Soluzione 5.2. Il caso $f(\alpha) = \alpha$ è di ovvia discussione, per il resto ci limitiamo ad affrontare il caso i).

Per ipotesi sappiamo che $\alpha > f(\alpha)$ e, poiché f è continua, per il teorema dei valori intermedi esiste un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ (limitato o meno) contenente il dato iniziale tale che $t > f(t)$, per ogni $t \in I$, e $f(I) = I$. Questo implica che l'orbita generata da α è contenuta in I ed è decrescente, in particolare è una successione regolare. La successione deve convergere all'estremo inferiore dell'intervallo, che è esattamente il numero α^-, il che conclude la prova. ■

Soluzione 5.3. Le prime richieste sono, tutto sommato, abbastanza semplici per cui ci dedichiamo esclusivamente all'ultimo punto. L'unica cosa che dobbiamo tenere in mente è che la funzione $\mathfrak{f}$ è continua e quindi vale il teorema dei valori intermedi.

I punti precedenti provano l'esistenza di punti periodici con periodo 1, 2 o 3, adesso supponiamo $n > 3$ e costruiamo la seguente successione di intervalli incapsulati: posto $I_0 = [1, 2]$, poiché $\mathfrak{f}(I_0) \supset I_0$ esiste $I_1 \subset I_0$ tale che $\mathfrak{f}(I_1) = I_0$, da questo possiamo dedurrre che $\mathfrak{f}(I_1) \supset I_1$ e che esiste $I_2 \subset I_1$ tale che $\mathfrak{f}(I_2) = I_1$. Reiterando il procedimento giungiamo all'intervallo $I_{n-2} \subset I_{n-3}$ tale che $\mathfrak{f}(I_{n-2}) = I_{n-3}$.

Osserviamo che se $x \in I_{n-2}$ allora vale che $\mathfrak{f}(x), \ldots, \mathfrak{f}^{n-2}(x) \in I_0$ e $\mathfrak{f}^{n-2}(I_{n-2}) = I_0 = [1, 2]$. Sappiamo che $\mathfrak{f}(I_0) \supset [0, 1]$ quindi esiste un sottointervallo I_{n-1} di I_{n-2} tale che $\mathfrak{f}^{n-1}(I_{n-1}) = [0, 1]$ e poiché $\mathfrak{f}([0, 1]) = [1, 2] \supset I_{n-1}$ possiamo affermare che esiste un punto $w \in A_{n-1}$ punto fisso di $\mathfrak{f}^n$. Tale punto è chiaramento n-periodico e non può avere un periodo minore perché le sue prime $(n - 2)$ iterazioni sono in $[1, 2]$, mentre $\mathfrak{f}^{n-1}(w) \in [0, 1]$ e non può trovarsi sul bordo, visto che $n > 3$! Per completare l'esercizio forniamo l'espressione esplicita della successione di intervalli incapsulati

$$I_n = \left[1 + \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ pari}}}^{n} \frac{1}{2^k}, 2 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ dispari}}}^{n} \frac{1}{2^k} \right].$$

■

Soluzione 5.5. Il problema è analogo al Problema 3.13 ed è facile provare che la matrice è una rotazione di $2\pi/3$ in senso orario. Quindi l'origine è l'unica soluzione stazionaria, mentre ogni $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathbf{O}$ è un punto 3-periodico. ■

Soluzione 5.8. Grazie al suggerimento è facile vedere che il sistema dinamico opera nel seguente modo: il numero rappresentato dalla successione $\{a_j\}$ (naturalmente consideriamo solo la parte frazionaria del numero) viene mappato nel numero corrispondente a $\{b_j\}$ (con $b_j = a_{j+1}$, per $j \geq 1$), questo significa che la dinamica del sistema fa scorrere verso sinistra la successione dei valori dopo la virgola che rappresentano il numero, cancellando gli eventuali numeri interi che si generano. Con questa fondamentale osservazione possiamo rispondere rapidamente alle varie questioni.

i) Le soluzioni stazionarie del sistema sono i numeri definiti tramite una successione costantemente uguale a 0 o 1, naturalmente i due casi definiscono lo stesso numero reale...

ii) Le orbite periodiche sono generate dai numeri la cui rappresentazione binaria è periodica, questo significa che le orbite periodiche sono generate dai numeri razionali.

iii) I numeri che non possiedono rappresentazioni definitivamente periodiche descrivono orbite caotiche, questo significa che stiamo pensando all'insieme di dati iniziali $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$! ∎

7. Dessert

In questo capitolo conclusivo espongo alcune informazioni (senza dimostrazioni) a proposito di alcuni sistemi dinamici discreti che presentano aspetti sorprendenti. Non vuole essere nulla di esauriente, piuttosto qualcosa che inviti all'esplorazione.

7.1. **La mappa logistica.** In biologia sono molto studiati i processi che governano la crescita (numerica) di popolazioni. Probabilmente il modello più studiato è dovuto a P.F. Verhulst, esso tiene conto del fatto che una maggior numero di individui tende a far aumentare notevolemnte la popolazione, però un eccessivo affollamento è dannoso, perché rende difficile un uso equilibrato dell'ambiente. In letteratura questo modello è proposto sotto forma della seguente equazione differenziale

$$u'(t) = k\left(u(t) - u^2(t)\right). \tag{7.1}$$

Discretizziamo l'equazione secondo lo schema di Eulero, quindi poniamo che $x_n = u(n\varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$. Da questo abbiamo

$$u'(n\varepsilon) = \frac{x_{n+1} - x_n}{\varepsilon}.$$

Se scegliamo $\varepsilon = 1$, otteniamo il seguente sistema dinamico discreto, anche detto **mappa logistica**

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + kx_n(1 - x_n) \\ x_0 = \alpha \in (0,1) \end{cases} \tag{7.2}$$

con $k \in \mathbb{R}^+$. Questo sistema dinamico è molto studiato perché presenta una notevole varietà di fenomeni. In particolare esiste una successione di valori $\{\lambda_j\} \subseteq [2,3]$ per i quali si ha

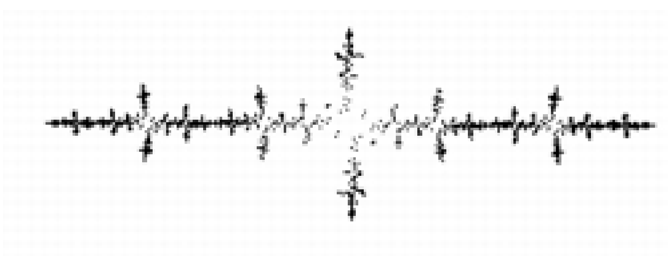
i) se $k \in (0,1]$ la successione converge monotonamente ad 1,
ii) se $k \in (1,2]$ la successione converge oscillando ad 1,
iii) se $k \in (2 = \lambda_1, \lambda_2]$ la successione oscilla con periodo 2,
iv) se $k \in (\lambda_j, \lambda_{j+1}]$ la successione oscilla con periodo 2^j,
v) se $k \in (\lambda_\infty, 3]$ la successione può essere periodica o meno,
vi) se $k > 3$ il sistema esplode rapidamente.

In particolare $\lambda_2 \simeq 2.449$, $\lambda_3 \simeq 2.544$ e che $\lambda_j \longrightarrow \lambda_\infty \simeq 2.570$.
Osserviamo, prima di chiudere questo paragrafo che (5.1) è un'altra possibile discretizzazione dell'equazione (7.1), questa a differenza di (7.2) converge ad 1 per ogni valore di k e per ogni valore iniziale α, senza presentare fenomeni strani di alcun tipo (vedi Problema 5.1)!

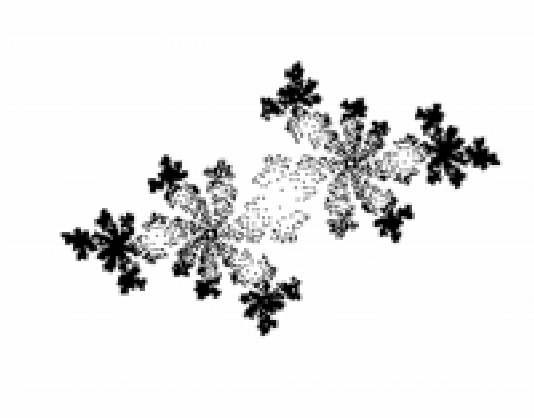
7.2. **Alcuni esempi di sistemi dinamici in $\mathbb{C}$.** Come conclusione inseriamo alcune informazioni sulle iterazioni in campo complesso (è doveroso ricordare lo studio di tale argomento è stato iniziato da P. Fatou e G. Julia). Precisamente ci limitiamo ad osservare (senza indugiare eccessivamente) la famiglia di applicazioni definita come segue

$$P_c(z) = z^2 + c.$$

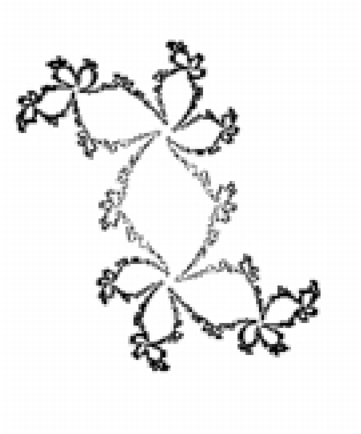
Tali applicazioni si riconducono alle mappe logistiche, se consideriamo la loro restrizione all'asse reale, la comparsa di fenomeni nuovi serve a far vedere quanta complessità c'è in una scrittura così semplice!
Il caso $c = 0$ è particolarmente semplice. L'applicazione diventa $P_0(z) = z^2$, che ha un unico punto fisso 0, il cui bacino di attrazione è l'interno del disco unitario $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, i punti di bordo del disco si muovono su S^1 raddoppiando il loro argomento ad ogni iterazione, mentre i punti esterni divergono verso ∞.
Indichiamo con $K_c = \{z \in \mathbb{C} : P_c^n \not\longrightarrow \infty\}$ l'insieme dei punti aventi orbite limitate, l'insieme ∂K_c ci chiama **insieme di Julia**. I soli insiemi di Julia geometricamente semplici sono K_0 e K_{-2}, gli altri sono tutti degli insiemi frattali! Qui di seguito ho messo un'approssimazione di alcuni insiemi di Julia.



Questo primo frattale è K_c con $c = -1.25 + 0.364i$.



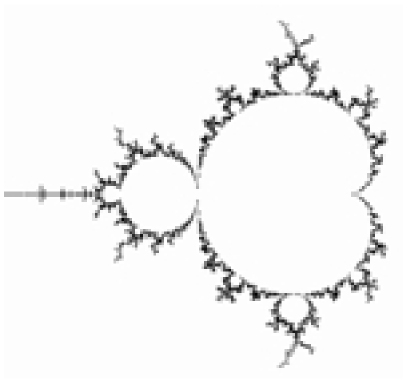
Ben diversa questa seconda immagine! Si tratta di K_c con $c = -0.63-0,459i$.



Infine K_c con $c = 0.270 + 0.537i$ per concludere la sfilata...

Questi oggetti sono chiaramente molto curiosi e complessi e non è possibile dilungarci su di essi, si pensi che è possibile dimostrare che K_c è connesso se e solo se l'origine appartiene a K_c!

Anche lo stranoto insieme di Mandelbrot è legato a questi argomenti, precisamente la sua definizione è la seguente $M = \{c \in \mathbb{C} : P_c^n(0) \not\longrightarrow \infty\}$! Per completezza includiamo una sua foto segnaletica...



Come ogni pasto che si rispetti ad un certo putno arriva l'ora di alzarsi (anche se a malincuore) da tavola, e con questa sconsolata riflessione vi saluto, sperando che vi siate divertiti almeno la metà di quanto mi sono divertito io!

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] M. Giaquinta & G. Modica, *Analisi Matematica. 2. Approssimazione e Processi Discreti*, Pitagora Editrice, 1999.
[2] R.L. Devaney, *An Introducion to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, 1989.
[3] K.J. Falconer, *The geometry of fractal sets*, Cambridge University Press, 1986.
[4] E. Giusti, *Complementi ed esercizi di analisi matematica. Volume I*, Bollati Boringhieri, 1995.
[5] R.A. Holmgren, *A First Course in Discrete Dynamical Systems*, Springer, 1996.
[6] T.Y.Li & J.A. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly **82**, 1975, 985–992.