

# SISTEMI DINAMICI NONLINEARI E APPLICAZIONI

Conferenza conclusiva del progetto  
“Dynamical Systems and Applications”  
(PRIN 2007B3RB3EY)

**Pisa, 18-19 febbraio 2011**

*Scuola Normale Superiore  
Centro di Ricerca Matematica E. De Giorgi*



AIMS

The aim of the meeting is to summarize and critically assess the collective researches of the PRIN group “Dynamical Systems and Applications” (PRIN 2007B3RB3EY) in the field of dynamical systems both for finite and infinite number of degrees of freedom. It also aims at discussing further lines of development for the research in the areas for Celestial Mechanics, statistical properties of Dynamical Systems, Hamiltonian PDE, Fermi-Pasta-Ulam lattices and other infinite dimensional models related to transport problems in non-equilibrium Statistical Mechanics.



## COMITATO SCIENTIFICO

Giancarlo Benettin  
Antonio Giorgilli

Carlangelo Liverani  
Stefano Marmi

## COMITATO ORGANIZZATIVO

Giancarlo Benettin  
Antonio Giorgilli  
Carlangelo Liverani

Stefano Marmi  
Simone Paleari

## PROGRAMMA

· ○ ● ○ ·

### Venerdì 18 febbraio

8:45 – 9:00	<b>Registrazione</b>
9:00 – 9:45	CARLO CARMINATI
10:00 – 10:30	LUCA MARCHESE
10:30 – 11:00	DAVID SAUZIN
11:00 – 11:30	<b>Coffee break</b>
11:30 – 12:00	JACOPO DE SIMOI
12:00 – 12:30	PAOLO GIULIETTI
–	<b>Pranzo</b>
14:00 – 14:45	ANTONIO PONNO
15:00 – 15:30	ALBERTO MAIOCCHI
15:30 – 16:00	ALBERTO MASPERO
16:00 – 16:30	<b>Coffee break</b>
16:30 – 17:00	CLAIRE CHAUDAUDRET
17:00 – 17:30	ANDREA GIACOBBE
17:30 – 18:15	ALESSANDRA CELLETTI
–	
20:15 –	<b>Cena sociale</b>

· ○ ● ○ ·

### Sabato 19 febbraio

9:00 – 9:45	MARCO SANSOTTERA
10:00 – 10:30	UGO LOCATELLI
10:30 – 11:00	NICOLA SANSONETTO
11:00 – 11:30	<b>Coffee break</b>
11:30 – 12:00	EMANUELE HAUS
12:00 – 12:30	CHRISTOPH LHOTKA
–	<b>Pranzo</b>
14:00 – 18:00	discussioni ad libitum

· ○ ● ○ ·

## TITOLI E ABSTRACT

· ○ ● ○ ·

CARLO CARMINATI

### *Continued fraction encoding of kneading sequences*

We will show that a certain set  $E$ , which is relevant in connection with the family of  $\alpha$ -continued fraction transformations, is also connected with the set  $\Lambda$  which encodes all possible kneading sequences of unimodal maps.

The set  $E$  can be described in terms of (ordinary) continued fraction expansions and is also strictly connected to constant type numbers.

· ○ ● ○ ·

ALESSANDRA CELLETTI

### *Stabilità di sistemi quasi-integrabili con dissipazione*

Si presentano alcuni risultati sulla stabilità di flussi e mappe quasi-integrabili con dissipazione. I metodi analitici utilizzati sono la teoria KAM e la teoria di Nekhoroshev per sistemi dissipativi. Queste tecniche consentono inoltre di formulare dei criteri numerici per il calcolo della soglia di rottura di attrattori quasi-periodici. I risultati ottenuti forniscono un importante strumento per comprendere il ruolo degli effetti dissipativi nella selezione delle risonanze, trovando ampie applicazioni nel caso della dinamica rotazionale e orbitale in Meccanica Celeste.

· ○ ● ○ ·

CLAIRE CHAUDAUDRET

### *Reducibility results for analytic and differentiable $SL(2, R)$ -valued quasi-periodic cocycles*

Quasi-periodic cocycles are the fundamental solutions of linear systems with quasi-periodic coefficients, as for instance the one-dimensional Schrödinger equation with quasi-periodic potential. They are said reducible if they can be conjugated, in some sense, to the fundamental solution of a system with constant coefficient. If the frequency is diophantine and if the potential is close enough to a constant in the analytic norm, a theorem by Eliasson says that the Schrödinger cocycle is analytically reducible for almost every energy. We will see an analogue of this theorem in the differentiable case.

· ○ ● ○ ·

JACOPO DE SIMOI

### *Orbite di fuga e isole ellittiche per limiti anti-integrabili della mappa standard*

In questo seminario verrà descritta una famiglia di mappe del cilindro, ciascuna delle quali può essere vista come una realizzazione di un limite anti-integrabile della mappa standard. Per questa famiglia di mappe è possibile dimostrare alcuni interessanti risultati sull'abbondanza di orbite di fuga e di punti periodici stabili (isole ellittiche).

· ○ ● ○ ·

ANDREA GIACOBBE

*Singularita' e geometria dei sistemi integrabili 2D*

La fibrazione in tori associata ad un sistema integrabile ha una geometria non necessariamente banale. Tale geometria e' diretta conseguenza delle singularita' del sistema.

Elencheremo le singularita' stabili dei sistemi integrabili a due gradi di liberta' e descriveremo le geometrie ad esse associate. Ci soffermeremo in particolare sulle singularita' di tipo cuspidale, che sono quelle a cui ci siamo dedicati negli ultimi tempi.

. o ● o .

PAOLO GIULIETTI

*Funzioni zeta dinamiche per flussi di Anosov.*

Dato un sistema dinamico continuo, si pu definire una funzione zeta "dinamica" basandosi sulle orbite, analogamente alla zeta di Riemann rispetto ai numeri primi. Presenteremo alcuni risultati ottenuti in collaborazione con C. Liverani and M. Pollicott, per la funzione zeta di Ruelle per flussi geodesici su variet a curvatura negativa. Si dimostra in questo caso, e pi generalmente per flussi di Anosov lisci, che la zeta di Ruelle si estende meromorficamente a tutto il piano complesso. Introdurr lo strumento principale usato in questo studio: l'operatore di trasferimento su spazi di correnti anisotropiche.

. o ● o .

EMANUELE HAUS

*Asymptotic stability of attitude-orbit resonance for the dynamics of a viscoelastic satellite*

We prove the asymptotic stability of 1:1 attitude-orbit resonance for a stiff viscoelastic rotationally invariant satellite. Very general assumptions are done about the internal structure of the satellite. Moreover, we do not assume any dissipation on the orbital degrees of freedom and we prove that anyway they relax to those of a circular orbit, due to the friction acting on the internal degrees of freedom of the satellite. Technically the result is obtained by using the principal moments of inertia as coordinates in the space of elastic configurations and by proving the asymptotic stability through LaSalle's principle, using the energy as a Lyapunov function.

. o ● o .

CHRISTOPH LHOTKA

*Exponential stability in nearly-Hamiltonian systems*

In a recent research work [1] we were able to construct a normal form for weakly dissipative dynamical systems which are related to nearly integrable Hamiltonian systems to which a dissipation is added. On the basis of the normal form equations we proved the exponential stability of the actions of the conservative system in the sense of Nekhoroshev. In this talk we will summarize the technique to derive the normal form and outline the proof of the theorem in short.

[1] Celletti A., Lhotka C., Stability for exponential times in nearly-Hamiltonian systems: the non-resonant case, Preprint 2011

. o ● o .

UGO LOCATELLI

*Long-time stability of the secular part of a planetary problem with more than three bodies*

This work is part of a research project I'm carrying out in collaboration with A. Giorgilli and M. Sansottera. We study the stability of the planetary problem including Sun, Jupiter, Saturn and Uranus (SJSU, respectively). We first make classical expansions of all the interaction terms between each pair of planets appearing in the Hamiltonian of the SJSU system. Therefore, we remove the main perturbing terms depending on the mean motion angles by a couple of canonical transformations similar to those usually adopted in the Kolmogorov's scheme for the construction of KAM tori. All these expansions are explicitly performed by algebraic manipulation on a computer. In order to reduce the huge number of terms to handle in the expansions, we limit ourselves to study the SJSU problem in the planar case. Since we want to investigate the results we can produce in the framework of the normal form theory, as a first stressing test, we furtherly simplify our model in a drastic way, by averaging the Hamiltonian with respect to the mean motion angles. Thus, we obtain a three degrees of freedom model, which is able to approximate the secular motions up to order 2 in the masses (and to high degree, i.e. 12, in the eccentricities). In a previous work of us (i.e., "On the stability of the secular evolution of the planar SJSU system", submitted to *Mathematics and Computers in Simulation*), we applied a rather standard scheme of estimates to the partial construction of the Birkhoff normal form about the origin of the phase space which is an elliptic equilibrium point. This allowed us to show that our secular Hamiltonian model is "effectively stable" for times larger than the age of the solar system "just" for all the initial conditions corresponding to eccentricities smaller than (about) 1/2 of the real values. In the present talk, we reconsider the same problem in order to extend the result to the "real" initial conditions. Therefore, we changed our approach by firstly looking for a KAM torus in the vicinity of the "real" orbit. Such a KAM torus is explicitly constructed up to a high order of approximation, by using algebraic manipulations on a computer; this allowed us to compare the flow on the torus with the numerical integration of the secular system and to show the good agreement between them. As a final step of our new approach, we evaluate the stability time related to the Birkhoff normal form about the KAM torus. This strongly improves our previous result.

· ○ ● ○ ·

ALBERTO MAIOCCHI

*Teoria delle perturbazioni al limite termodinamico*

Intendiamo presentare un metodo per studiare sistemi Hamiltoniani quasi integrabili al limite termodinamico tramite la teoria delle perturbazioni. Per questo scopo, ci si concentra sul controllo delle autocorrelazioni temporali di alcune variabili dinamiche, con l'intento di osservare su quale scala temporale avvengano fluttuazioni significative delle variabili dall'evoluzione lenta (parleremo, in proposito, di tempi di mescolamento). Infatti, lo studio delle correlazioni consente di ottenere risultati indipendenti dal numero di gradi di libert, grazie all'impiego di tecniche probabilistiche. Il metodo qui proposto ci ha consentito di trovare, per una discretizzazione del modello Phi 4, un limite inferiore per i tempi di mescolamento che cresce esponenzialmente al tendere a zero dei parametri perturbativi (si veda A. Carati, A. Maiocchi, preprint arXiv:1011.5846v1 math-ph)

· ○ ● ○ ·

LUCA MARCHESE

*Escursioni all'infinito per il flusso di Teichmüller e condizioni alla Khinchin*

Una superficie di traslazione (o differenziale abeliano) è una superficie piatta di genere positivo con singolarità coniche isolate il cui angolo è un multiplo di  $2\pi$ . Tratterò il flusso di Teichmüller sullo spazio dei moduli delle superfici di traslazione, presentando una stima ottimale per la frequenza delle escursioni all'infinito di una geodetica di Teichmüller generica. Tale stima generalizza la legge logaritmica di Masur.

Le superfici di traslazione sono strettamente legate alle trasformazioni di scambio di intervalli (T.S.I.), delle isometrie a tratti di un intervallo in sè stesso con un numero finito di discontinuità. Introdurrò una condizione diofantea per le T.S.I., a cui corrispondono le proprietà in esame del flusso di Teichmüller. Per tale condizione presenterò la generalizzazione alle T.S.I. del Teorema di Khinchin classico.

· ○ ● ○ ·

ALBERTO MASPERO

*Birkhoff coordinates for the Toda Lattice in the infinite limit*

In this paper we prove estimates uniform in the number of particles on the domain of definition of the Birkhoff coordinates for the Toda lattice. In order to prove results uniform with the size of the chain we apply to the Toda lattice a Vey type theorem recently proved by Kuksin and Perelman. The use of Kuksin Perelman's theorem is based on the Lax pair formulation and on the corresponding spectral construction of the integral of motion. So the adaptation of the method to the Toda lattice requires the extension to Jacobi matrixes of some methods introduced for the study of Sturm Liouville problems.

The development of such method lead naturally to the introduction of spaces of sequences similar to Sobolev spaces, and to the extension to the framework of discrete systems of the connection between the decay of the spectral gaps and the smoothness of the corresponding state. We also deduce invariance of the spaces of smooth states under the dynamics of the Toda lattice.

· ○ ● ○ ·

ANTONIO PONNO

*The Fermi-Pasta-Ulam problem*

A overall look of the Fermi-Pasta-Ulam problem, which takes into account some recent results on the subject, is presented.

· ○ ● ○ ·

NICOLA SANSONETTO

*Il problema della Noetherianità delle costanti del moto in meccanica anolonoma*

Per i sistemi meccanici olonomi vi è un legame sostanzialmente ben capito tra integrali primi e simmetrie, basato sul teorema di Noether. Il caso anolonomo invece è molto diverso e non completamente compreso. Verranno presentati alcuni risultati che indicano come tale legame persista anche in meccanica anolonoma, anche se sotto forme differenti. In particolare discuteremo il concetto della Noetherianità degli integrali primi in meccanica anolonoma.

· ○ ● ○ ·

MARCO SANSOTTERA

*Stabilità effettiva di sistemi planetari Hamiltoniani*

The stability of the Solar System is a classical, long standing and challenging problem, already pointed out by Newton.

In this talk I revisit the problem in the light of Kolmogorov and Nekhoroshev theorems, with the aim of proving that they apply to realistic approximations of the Sun-Jupiter-Saturn and Sun-Jupiter-Saturn-Uranus systems.

The present work is devoted to the study of three main problems, namely: (i) the applicability of Kolmogorov and Nekhoroshev theory to the problem of three bodies; (ii) the stability of the secular evolution of the planar Sun-Jupiter-Saturn-Uranus system; (iii) the explicit construction of the normal form for elliptic tori in planetary systems.

This is a joint work with A. Giorgilli and U. Locatelli.



DAVID SAUZIN

*There is only one KAM curve*

Consider a near-integrable symplectic map on the cylinder  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$  like the standard family

$$(x, y) \rightarrow (x + y + kf(x), y + kf(x))$$

(where  $f$  is any real analytic periodic function with zero mean,  $k$  is a small parameter) and the corresponding KAM curves: inspired by Kolmogorov, Arnold and Herman, we show that, instead of viewing these invariant curves as separate objects, each of which having its own Diophantine frequency, one can encode them in a single “monogenic” “quasi-analytic” function of the frequency.

(joint work with C.Carminati and S.Marmi)

